1171. 束及ビ半順序集合ノ積分解ニツイテ

中山　正（名大）

単位及ビ零ヲ有スル束ノ直積（＝積）分解ノ一意性ハ周知ノ如クデ，Birkhoff ノ本２３頁ニ述ベラレテヰル。（Bull. A. M. S. 40 参照）　一般ノ半順序集合ニツイテ真ノ一意性ガ成立タヌコトハ明カダガ，同型ノ意味デノ一意性ガ成立ツ豫想ハ未解決トシテ同書ノ問題ニ述ベラレテヰル。

半順序集合デモ 0 及ビ 1 ヲ有スルモノデハ眞ニ一意的ナコト同処ニ述ベラレタ如クデアル。

サテ横山氏ハ本誌253—4号ニ單ニ最小元 0 ノミヲ有スル半順序集合ニ（眞ノ）一意性ノ成立ツコトヲ証明サレタ以下ニハ更ニ拡張シテ，

次ノ様ナ條件ヲミタス半順序集合 P ニツイテ（眞ノ）一意性ノ成立ツコトヲ示シタイ：

「條件」 P ニアル一元 e が存在シテ，任意ノ P ノ元 x ニ對シ x 及ビ e ヨリ $\leqq$ ナル元及ビ $\geqq$ ナル元ガ P ニ存在マルトスル。

例ヘバ 0 ヲ有スレバソレデヨイが，或ヒハ 0 モ 1 モナイ。一般ノ束ニツイテ適用サレル。ソノ証明ハ大体容易デアルが，先ヅ束 L ノ場合ヲ始メニ述ベヨウ。

即チ 束 L が二様ニ積ニ分解シテヰルトシテ

$$L = X_1 X_2 \cdots\cdots X_n = Y_1 Y_2 \cdots\cdots Y_m$$

トスル。L ノ各元ハコレニ應ジテ

$$x = (x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n) = (y_1, y_2, \cdots\cdots, y_m)$$
$$(x_i \in X_i,\ y_j \in Y_j)$$

ト表ハサレル。今 L ノ任意ノ元 e ヲトリシバラク此レヲ固定スル、而シテ

$$e = (e_1, e_2, \cdots\cdots, e_n) = (f_1, f_2, \cdots\cdots, f_m)$$
$$(e_i \in X_i,\ f_j \in Y_j)$$

トスル。x_1 ヲ X_1 ノ任意ノ元トシ，$x_1^* = (x_1, e_2, \cdots\cdots,$

e_n) ナルLノ元ヲ考ヘル。X_1ヲx_1ガ動クトキノx_1^*ノ全体ヲX_1^*デ表ハセバ，$x_1 \longleftrightarrow x_1^*$ニヨリ$X_1^*$ハ$X_1$ト同型ナ(Lノ部分)束ヲナス．コヽニ$X_1^*$ハ$e$ヲ含ミ且ツ

$$a, b \in X_1^*, \quad a \leqq c \leqq b \quad \text{ナラバ} \quad c \in X_1^*$$

ナル性質ヲモツ．同様ニ$i = 1, 2, \cdots\cdots, n$トシテ$X_i^*$ヲ得ル．更ニ$Y_j$ニヨル積表示ニ對應シテ$(y_1, f_2, \cdots\cdots, f_m)$ $(y_1 \in Y_1)$ナルLノ元ノ全体Y_1^*ガY_1ト同型デ同様ナ性質ヲモツ束トナル。Y_j^* $(j = 1, 2, \cdots\cdots, m)$ニツイテモ同ジ。

サテX_1^*ノ元x_1^*ヲY_j表示ニ從ツテ$x_1^* = (y_1(x_1), y_2(x_1), \cdots\cdots, y_m(x_1))$トスル，今

$$x_{1j}^* = (f_1, \cdots\cdots, f_{j-1}, y_j(x_1), f_{j+1}, \cdots\cdots, f_m)$$

トオクニ，例ヘバ$j = 1$ニ對シ

$$\begin{aligned} x_{11}^* &\leqq (y_1(x_1) \smile f_1, \ y_2(x_1) \smile f_2, \cdots\cdots, y_m(x_1) \smile f_m) \\ &= x_1^* \smile e. \end{aligned}$$

コヽニx_1^*, $e \in X_1^*$ダカラ$x_1^* \smile e \in X_1^*$デアル．

同様ニ$x_{11}^* \geqq x_1^* \frown e \in X_1^*$．ヨッテ$X_1^*$ノ性質カラ$x_{11}^* \in X_1^*$トナル．他方明カニ$x_{11}^* \in Y_1^*$デアル。

同様ニシテX_1^*トY_j^*ノ共通部分ヲZ_{1j}^*デ表ハセバ$x_{1j}^* \in Z_{1j}^*$トナル。

X_1ノ二元x_1, u_1ヲトレバ$(x_1 \asymp u_1)_j^* = x_{1j}^* \asymp u_{1j}^*$ナルコトハ明カデアル．ヨッテ$x_1 \longrightarrow x_{1j}^*$ハ$X_1$カラ$Z_{1j}^*$ヘノ準同型デアル。更ニ$x_1$ハ$x_{11}^*$, x_{12}^*, $\cdots\cdots$, x_{1m}^*デキ

マルカラ

$$x_1 \longrightarrow (x^*_{11}, x^*_{12}, \cdots\cdots, x^*_{1m})$$

ニヨリ X_1 ハ積 $Z^*_{11}\,Z^*_{12}\cdots\cdots Z^*_{1m}$ ノ中ニ同型ニ写像サレル．コヽニ X_1 ノ像ハ積全体ニ渉ルコトヲ見ルタメニ，各 j ニツキ任意ニ

$$Z^*_{1j} = (f_1, \cdots\cdots, f_{j-1}, y_j, f_{j+1}, \cdots\cdots, f_m) \in Z^*_{1j}$$

ヲトル．而シテ $Z^*_1 = (y_1, y_2, \cdots\cdots, y_m)$ トオケバ

$$Z^*_1 \leqq (y_1 \smile f_1,\ y_2 \smile f_2, \cdots\cdots, y_m \smile f_m)$$

$$= Z^*_{11} \smile Z^*_{12} \smile \cdots\cdots \smile Z^*_{1m}$$

$Z^*_{1j} \subseteqq X^*_1$ ダカラコノ右辺ハ $\in X^*_1$．同様ニ $Z^*_1 \geqq Z^*_{11} \frown Z^*_{12} \frown \cdots\cdots \frown Z^*_{1m} \in X^*_1$．従ツテ Z^*_1 ハ X^*_1 ニ属シ，コレニ對應スル $Z_1 \in X_1$ ノ像ハ與ヘラレタ $(Z^*_{11}, Z^*_{12}, \cdots\cdots, Z^*_{1m})$ デアル．カクテ $X_1 \cong Z^*_{11}\,Z^*_{12}\cdots\cdots Z^*_{1m}$ トナル．

一般ニ同様ニ Z^*_{ij} ヲ導入スレバ

$$X_i \cong Z^*_{i1}\,Z^*_{i2}\cdots\cdots Z^*_{im}$$

トナル．而シテ對稱的ニ

$$Y_j \cong Z^*_{1j}\,Z^*_{2j}\cdots\cdots Z^*_{nj}$$

デアル。従ツテ

$$L \cong Z^*_{11}\,Z^*_{12}\cdots\cdots Z^*_{ij}\cdots\cdots Z^*_{nm}$$

ハ我々ノ<u>直積表示ノ共通ノ精密化デアル</u>。

特ニ若シ X_i, Y_i ガミナ既約ナラバ $m=n$ デアリ適當ナ順序デ $X_1, \cdots\cdots, X_n$ ト $Y_1, \cdots\cdots, Y_n$ ガ互ニ同型ニナル。

サラ，次ニ束デナク一般ノ前述ノ條件ヲミタス半順序集合ノ場合デアルガ，ソノ場合ハ上ト同様デ單ニ「任意ノ元 e」ノ代リニ條件中ノ e ヲトル．而シテ，e ノ X_1 ノ成分ヲ上ノ如ク e_1 トスレバ，e_1 ガ X_1 ニオイテ丁度 P ニ於ケル e ノ如キ性質ヲ有ツ．ソコデ $x_1 \in X_1$ ニ対シテ $x_1, e_1 \leqq \bar{x}_1$ ナル $\bar{x}_1 \in X_1$ ヲトレバ $\bar{x}_1^* = (\bar{x}_1, e_2, \ldots\ldots, e_n) \in X_1^*$.

$\bar{x}_1^* \geqq e$ ダカラ $\bar{x}_{1j}^* \in X_1^*$ ノコトハ直チニ知ラレル．同様ニ $x_1, e_1 \geqq \bar{\bar{x}}_1$ ヲトリ，$\bar{\bar{x}}_{1j}^* \in X_1^*$

然ルニ $\bar{\bar{x}}_{1j}^* \leqq x_{1j}^* \leqq \bar{x}_{1j}^*$ ダカラ $x_{1j}^* \in X_1^*$，ヨッテ上ノ如ク $\in Z_{1j}^*$ デアル。

$X_1 \longrightarrow Z_{1j}^*$ ガ準同型ノ事ハ明カ。

次ニ「上ヘ」ノ証明デアルガ，與ヘラレタ $z_{1j}^* \in Z_{1j}^*$ ニ對シ，$z_{1j}^*, e (= e_{1j}^*) \leqq \bar{z}_{1j}^*$ ナル $\bar{z}_{1j}^* \in Z_{1j}^*$ ヲトリ，ソレニツキ上ノ如ク $\bar{z}_1^*$ ヲツクレバソレニ對シテハ $z_1^* \in X_1^*$ ナルコトハ上ノ通リ，而シテ $z_1^* \leqq \bar{z}_1^*$. 同様ニ $z_1^* \geqq \bar{\bar{z}}_1^*$ ナル $\bar{\bar{z}}_1^* \in X_1^*$ ガトレルカラ $z_1^* \in X_1^*$ トナリ証明サレル。

カクテ我々ノ條件ヲミタス場合ニハ積分解ノ一意性ガ成立ツ。

コレデ多分良イト思ヒマスガ，一般ノ半順序集合ノトキノ（同型的）一意性ニツキ御教示イタダケレバ倖ニ思ヒマス。

—— 以上 ——